E.S.M. SAINT-CYR CONCOURS SCIENCES 1977

EPREUVE DE CALCUL (2 h) ×I35×

Le candidat présentera ses calculs dans des tableaux clairs et précis où devront figurer tous les résultats intermédiaires. Pour chaque calcul, il précisera le moyen de calcul et les tables utilisés.

1. On définit la fonction f sur $[0, \infty[$ par $f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$.

a) Montrer que cette fonction est intégrable sur $[0, \infty[$.

b) Calculer $f(s_i)$ à 10^{-4} près pour $s_i = \frac{i}{10}$, $i = 0, 1, 2, \ldots, 10$.

2. On définit la fonction F sur $[0, \infty[$ par $F(x) = \int_0^x f(s)\, ds$, et on note T_m l'approximation de $F(1)$ que fournit la formule des trapèzes utilisée avec le pas $h = \frac{1}{m}$.

a) Calculer T_5 et T_{10} en utilisant les résultats de (1.b).

b) Contrôler les résultats en sachant que $F(1) = 0{,}855624$ à 10^{-6} près.

3. L'entier m étant fixé, on pose :

$$h = \frac{1}{m}, \quad u_0 = e^{-\frac{h^2}{2}}$$

et on définit les $m-1$ nombres u_i par : $u_i = u_{i-1} \times u_0^2$, $i = 1, 2, \ldots, m-1$, et les m nombres v_i par :

$$v_{m-1} = \frac{u_{m-1}}{2}, \quad v_{m-i} = (v_{m-i+1} + 1)\, u_{m-i}, \quad i = 2, \ldots, m.$$

a) Montrer que :

$$u_i = u_0^{(i+1)^2 - i^2} \qquad \text{pour } i = 0, 1, \ldots, m-1.$$

b) Montrer que :

$$v_{m-i} \times u_0^{(m-i)^2} = \frac{u_0^{m^2}}{2} + \sum_{j=1}^{i-1} u_0^{(m-j)^2} \qquad \text{pour } i = 1, 2, \ldots, m.$$

c) En déduire que :

$$T_m = \left(v_0 + \frac{1}{2}\right) h.$$

d) Calculer T_5 par cette méthode en utilisant la table de logarithmes.

4. Nous nous proposons maintenant de calculer la racine $\hat{x}$ de l'équation $F(x) = 1$ en utilisant la méthode de Newton qui fournira une suite d'approximations notées x_i, $i = 0, 1, \ldots,$ à partir de la valeur initiale $x_0 = 1$. Pour calculer $F(x_{i+1})$, nous admettrons que :

$$F(x_{i+1}) = F(x_i) + \left[f(x_i) + f(x_{i+1}) + 4f\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right)\right] \times \frac{x_{i+1} - x_i}{6} + \varepsilon$$

où $|\varepsilon|$ est inférieur à 10^{-5} pourvu que :

$$x_{i+1} - x_i < 0{,}3 \quad \text{et} \quad x_{i+1} \geqslant x_i \geqslant 1.$$

a) Etablir l'existence et l'unicité de $\hat{x}$ en admettant que : $\lim_{x \to \infty} F(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

b) Montrer que : $x_i < x_{i+1} < \hat{x}$, $\forall i \geqslant 0$.

c) Calculer les itérés x_{i+1} jusqu'à ce que : $1 - F(x) \leqslant 10^{-3}$.

5. a) Tracer le graphe de f sur l'intervalle $[0, b]$ où $b = 1{,}3$.

b) Donner sur ce graphe une interprétation simple d'une itération de la méthode de Newton en termes d'aires.

FIN

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail